Untersuchungen über die absoluten Beträge der Wurzeln algebraischer, insbesondere kubischer Gleichungen

Teildruck der

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der

Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Basel

von

Eduard Batschelet

aus Basel

Basel 1944

Buchdruckerei E. Birkhäuser & Cie.

Untersuchungen über die absoluten Beträge der Wurzeln algebraischer, insbesondere kubischer Gleichungen

Teildruck der

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der

Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Basel

von

Eduard Batschelet

aus Basel

Basel 1944

Buchdruckerei E. Birkhäuser & Cie.

Genehmigt von der Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät auf Antrag der

Herren Professoren Dr. A. Ostrowski und Dr. O. Spiess.

Basel, den 5. Februar 1942.

Prof. Dr. A. Portmann,
Dekan.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Herrn Ed. Batschelet wurde von der Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Basel am 16. November 1943 erlaubt, diesen Teildruck seiner am 5. Februar 1942 genehmigten Dissertation drucken zu lassen. Die vollinhaltliche Arbeit mit dem gleichen Titel wie der Teildruck kann eingesehen oder entliehen werden:

1. im Mathematischen Seminar der Universität Basel,
2. in der Universitätsbibliothek Basel,
3. in der Schweizerischen Landesbibliothek in Bern.

Separatdruck aus den
Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel,
Bd. LV, 1944.

Untersuchungen
über die absoluten Beträge der Wurzeln algebraischer, insbesondere kubischer Gleichungen.

Untersuchungen über die absoluten Beträge der Wurzeln algebraischer, insbesondere kubischer Gleichungen.

Mit 1 Textfigur.

Von Eduard Batschelet, Basel.

Literatur.

L. Berwald: (1) Elementare Sätze über die Abgrenzung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung, Acta Szeged, Bd. 6 (1934), p. 209—221.

M. Biernacki: (1) Sur les équations algébriques contenant des paramètres arbitraires, Bull. Acad. Pol., sér. A (1927), p. 1—145.

G. D. Birkhoff: (1) An elementary double inequality for the roots of an algebraic equation having greatest absolute value. Bull. Amer. Math. Soc., Vol. XXI (1914), p. 494—495.

A. L. Cauchy: (1) Exercises de Mathématiques. Oeuvres (2) vol. 9, p. 87—161.

A. Cohn: (1) Über die Wurzelanzahl algebraischer Gleichungen in einem Kreis. Math. Ztschr., Bd. 14 (1922), p. 110—148.

G. Herglotz: (1) Über die Wurzeln trinomischer Gleichungen. Verh. Sächs. Akad. Wiss., math.-phys. Kl., Bd. 74 (1922), p. 3—8.

J. L. W. V. Jensen: (1) Forskellige Bidrag til Ligningernes Theori, Nyt Tidsskrift, vol. 26A (1915), p. 6—13.

P. Montel: (1) Sur quelques limites pour les modules des zéros des polynômes, Comm. Math. Helv., Bd. 7 (1934—1935), p. 178—200.

A. Ostrowski: (1) Recherches sur la méthode de Graeffe et les zéros des polynômes et des séries de Laurant. Acta math., t. 72 (1940), p. 99—257.
(2) On a teorem by J. L. Walsh concerning the moduli of roots of algebraic equations, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 47 (1941), p. 742—746.

A. E. Pellet: (1) Sur un mode de séparation des racines des équations et la formule de Lagrange. Darboux's Bull. (2), t. V (1881), p. 393—395.

J. L. Walsh: (1) On Pellet's theorem concerning the roots of a polynomial. Annals of math., vol. 26 (1924), p. 59—64.

Einleitung.

Bei neueren Untersuchungen über das Graeffesche Verfahren hat sich das folgende Problem als wichtig erwiesen[1]):

Sei

$$(1) \qquad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \; a_0 \neq 0, \; a_n \neq 0 \; ,$$

eine algebraische Gleichung n-ten Grades. Ihre Wurzeln seien mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bezeichnet und nach fallenden absoluten Beträgen geordnet. Es gelte also

$$(2) \qquad |x_1| \geqq |x_2| \geqq \ldots \geqq |x_n| \, .$$

Zwischen welchen Schranken variiert $|x_k|$, $1 \leqq k \leqq n$, wenn man die Argumente der Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ beliebig verändert, ihre absoluten Beträge aber festhält?

Durch die erwähnte Variation von $a_0, a_1, \ldots, a_n$ entsteht aus (1) eine Schar von Gleichungen, die wir eine äquimodulare Gleichungsschar nennen wollen. Die Wurzeln jeder Schargleichung seien gemäss (2) geordnet. Wir bezeichnen allgemein mit Z_k die genaue obere und mit ζ_k die genaue untere Schranke von $|x_k|$, $1 \leqq k \leqq n$. Die „relative Breite" des Intervalls, in dem $|x_k|$ variiert, wird durch den Quotienten $\frac{Z_k}{\zeta_k}$ gemessen. Herr A. Ostrowski[2]) hat nun in einer für unsere Untersuchungen grundlegenden Arbeit bewiesen, dass für jede äquimodulare Schar von Gleichungen n-ten Grades und für jedes k, $1 \leqq k \leqq n$,

$$\frac{Z_k}{\zeta_k} \leqq c_n$$

gilt, wo c_n eine nur von n abhängige, minimale Schranke bezeichnet. Er hat überdies gezeigt, dass

$$(3) \qquad c_2 = 1 + \sqrt{2} \; ,$$

$$(4) \qquad c_n < 0{,}73 \cdot (n+1)^2$$

ist, und dass für $n \to \infty$

$$(5) \qquad \underline{lim} \; \frac{c_n}{n} \geqq \frac{4}{\pi} = 1{,}273 \ldots$$

gilt.

---

[1]) z. B. Ostrowski (1). Vgl. auch Montel (1), wo verwandte Probleme behandelt werden.

[2]) Ostrowski (1), p. 145—148.

In der vorliegenden Arbeit bestimmen wir den Wert von c_3 und erhalten dafür

$$c_3 = 5{,}274\ldots, \tag{6}$$

eine Zahl, welche die grösste positive Wurzel der Gleichung $x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1 = 0$ ist. Ausserdem bestimmen wir die Zahlen $c_3^{(1)}$, $c_3^{(2)}$, $c_3^{(3)}$, welche die maximalen relativen Breiten der Intervalle bezeichnen, in denen die absoluten Beträge der drei Wurzeln x_1, x_2 resp. x_3 einer äquimodularen Schar von kubischen Gleichungen variieren. Wir erhalten

$$c_3^{(1)} = c_3^{(3)} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} = 3{,}874\ldots, \quad c_3^{(2)} = c_3 = 5{,}274\ldots . \tag{7}$$

Auf Grund einer Ungleichung, die von Herrn G. D. Birkhoff und unabhängig von ihm von Herrn J. L. Jensen[1]) gefunden wurde, gelingt es überdies, für einen beliebigen Grad n die maximalen Breiten $c_n^{(1)}$, $c_n^{(n)}$ der Intervalle anzugeben, in denen der absolute Betrag der absolut grössten, resp. der absolut kleinsten Wurzel der Gleichungen einer äquimodularen Schar variiert. Wir erhalten

$$c_n^{(1)} = c_n^{(n)} = \frac{1}{\sqrt[n]{2}-1} . \tag{8}$$

Aus (8) folgt unmittelbar (3) und ausserdem

$$\underline{lim}\ \frac{c_n}{n} \geqq \frac{1}{\lg 2} = 1{,}442\ldots , \tag{9}$$

ein Ergebnis, das etwas schärfer als (5) ist.

Bei unseren Beweisen machen wir häufig von zwei Sätzen Gebrauch, die auf A. E. Pellet und auf Herrn J. L. Walsh zurückgehen. Der Satz von Pellet lautet[2]):

Wenn das Polynom

$$|a_0| + |a_1|\,x + \ldots + |a_{k-1}|\,x^{k-1} - |a_k|\,x^k + |a_{k+1}|\,x^{k+1} + \ldots + |a_n| = 0 \tag{10}$$

zwei positive Wurzeln x_1 und x_2, $x_1 < x_2$, besitzt, so hat das Polynom

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \tag{11}$$

keine Wurzel im Kreisring $x_1 < |x| < x_2$ und genau k Wurzeln im Kreis $|x| \leqq x_1$.

---

[1]) Birkhoff (1), p. 495. Jensen (1), p. 10. Über ähnliche Ergebnisse vgl auch Cohn (1), p. 143—144 und Berwald (1), § 1.

[2]) Pellet (1), p. 393. S. auch Walsh (1), p. 59.

Auf die Bedeutung dieses Satzes hat vor allem Herr WALSH aufmerksam gemacht und ausserdem gezeigt, dass der Satz von PELLET gewissermassen umkehrbar ist und das genaue Gebiet der Zahlenebene liefert, in dem die Wurzeln sämtlicher Gleichungen der durch (11) festgelegten äquimodularen Schar liegen[1]). Allerdings war sein Beweis nicht ganz korrekt. Herr OSTROWSKI hat dies bemerkt und zugleich den ersten vollständigen Beweis gegeben[2]). In der vorliegenden Arbeit werden wir einen neuen Beweis bringen, der sich auf eine einfache geometrische Überlegung stützt (§ 1, Satz I).

Mit Hilfe der beiden Ergebnisse von PELLET und WALSH gelingt es, ζ_{n-k} und Z_{n-k+1} zu bestimmen, wenn die Gleichung (10) für das betreffende k zwei positive Wurzeln besitzt. Wir stossen aber auf erhebliche Schwierigkeiten, wenn diese Bedingung für ein k nicht erfüllt ist, wenn also, wie wir sagen werden, die Wurzeln nicht separiert sind.

Für die „mittlere" Wurzel x_2 der Gleichungen einer kubischen äquimodularen Schar gelingt es uns allerdings leicht, ein Ergebnis herzuleiten, das — für diesen Sonderfall — die Sätze von PELLET und WALSH auf die gewünschte Art erweitert. Es besagt im wesentlichen: Z_2 und ζ_2 sind stets die absoluten Beträge der „mittleren" Wurzeln zweier bestimmten reellen Schargleichungen, d. h. zweier Schargleichungen mit reellen Koeffizienten.

Dieser Satz könnte die Vermutung aufkommen lassen, dass für beliebige äquimodulare Scharen von Gleichungen n-ten Grades die Schranken Z_k und ζ_k, $1 \leqq k \leqq n$, unter den absoluten Beträgen der Wurzeln reeller Schargleichungen zu suchen sind. In der Tat ist dies für trinomische Gleichungen richtig, wie sich leicht aus gewissen Ergebnissen von Herrn G. HERGLOTZ und von Herrn M. BIERNACKI[3]) ersehen lässt. Dass die Vermutung aber bereits für quadrinomische Gleichungen nicht stimmt, ergibt sich aus der Berechnung der genauen Schranken Z_k und ζ_k, $k = 1, 2, 3$, für kubische Gleichungen. Diese Berechnung wird durchgeführt in der vollständigen Fassung der vorliegenden Dissertation[4]). Es wird

---

[1]) WALSH (1), p. 61.

[2]) OSTROWSKI (2), p. 743.

[3]) HERGLOTZ (1), p. 5, Formel (9) und BIERNACKI (1), p. 42.

[4]) Die vollständige Arbeit mit dem gleichen Titel wie der Teildruck kann eingesehen oder entliehen werden: 1. im mathematischen Seminar der Universität Basel, 2. in der Universitätsbibliothek Basel und 3. in der Schweizerischen Landesbibliothek Bern.

dort gezeigt, dass neben den reellen Schargleichungen noch gewisse komplexe Schargleichungen mit Doppelwurzeln zu berücksichtigen sind.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. A. Ostrowski, möchte ich an dieser Stelle für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie für zahlreiche Ratschläge bei ihrer Durchführung herzlich danken.

§ 1. Elementare Sätze über äquimodulare Gleichungsscharen.

1. Wir bezeichnen mit n eine ganze positive Zahl und mit $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ reelle Zahlen, für die

$$(1,1) \quad \alpha_0 > 0, \ \alpha_n > 0, \ \alpha_\nu \geqq 0 \quad , \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-1 \ ,$$

gilt.

Dann verstehen wir unter der äquimodularen Gleichungsschar $\mathfrak{F}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ die Gesamtheit aller algebraischen Gleichungen n-ten Grades

$$(1,2) \qquad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \ ,$$

deren Koeffizienten den Bedingungen

$$(1,3) \qquad |a_\nu| = \alpha_\nu \quad , \quad \nu = 0, 1, \ldots, n \ ,$$

genügen.

Variiert man in einer gegebenen Gleichung

$$f(x) \equiv \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{n-\nu} = 0 \ , \ a_0 \cdot a_n \neq 0 \ ,$$

die Argumente der Koeffizienten beliebig, so erhält man neue Gleichungen, die alle zur gleichen äquimodularen Schar gehören. $f(x)$ legt also eine äquimodulare Gleichungsschar fest.

Sei $\mathfrak{F}(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ eine fest gewählte äquimodulare Gleichungsschar. Ist eine — reelle oder komplexe — Zahl x Wurzel einer Schargleichung, so ist offenbar jede Zahl von gleichem absoluten Betrage wie x ebenfalls Wurzel einer Schargleichung. Daher verteilen sich die Wurzeln sämtlicher Gleichungen aus $\mathfrak{F}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ in der Zahlenebene auf gewisse Kreisringe mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt. Ihre Radien sind durch die Konstanten $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ eindeutig bestimmt.

Satz I. Sei $\mathfrak{F}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ eine gegebene äquimodulare Gleichungsschar. Eine beliebige Zahl x ist dann und nur dann Wurzel einer Schargleichung, wenn sämtliche Ungleichungen

$$(1,4) \qquad \alpha_k |x|^{n-k} \leqq \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq k}}^{n} \alpha_\nu |x|^{n-\nu} \ , \quad k = 0, 1, \ldots, n \ ,$$

erfüllt sind.

Dem Beweis stellen wir ein Lemma voran.

Lemma. N gegebene Strecken $s_1, s_2, \ldots, s_N$ können dann und nur dann zu einem geschlossenen, ebenen Polygon vereinigt werden, wenn jede der N Strecken kleiner ist als die Summe der übrigen, wenn also sämtliche Ungleichungen

$$(1,5) \qquad s_k < \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k}}^{N} s_\nu \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, N \ ,$$

gelten.

Beweis. Dass die Bedingung erfüllt sein muss, ist klar. Um zu zeigen, dass sie auch hinreichend ist, denken wir uns die Strecken ihrer Länge nach geordnet, so dass etwa $s_1 \geqq s_2 \geqq \ldots \geqq s_N$ ist [1]). Wir zeichnen über der Strecke s_1 einen hinreichend grossen Kreisbogen und tragen $s_2, s_3, \ldots, s_N$ vom einen Endpunkt von s_1 aus hintereinander als Sehnen im Kreisbogen ab. Wir dürfen dabei annehmen, dass sich der entstandene Streckenzug $s_1, \ldots, s_N$ nirgends überschneidet. Ist er offen, so verkleinern wir den Kreisbogen kontinuierlich, u. U. bis er die minimale Länge von s_1 hat. Bei diesem Vorgang muss sich einmal der Streckenzug zu einem Polygon schliessen, weil sonst $s_1 \geqq s_2 + s_3 + \ldots + s_N$ wäre, entgegen der Voraussetzung (1, 5).

Im folgenden brauchen wir den Begriff Polygon auch für den Grenzfall, wo die Seiten $s_1, \ldots, s_N$ in eine Gerade fallen. Dann bleibt das Lemma offenbar richtig, wenn man in (1, 5) das Gleichheitszeichen zulässt.

---

[1]) Man beachte, dass die Behauptung von der Reihenfolge unabhängig ist nach dem kommutativen Gesetz für Vektoren.

Beweis von Satz I. Die Grössen $\alpha_\nu \,|\, x \,|^{n-\nu}$, $\nu = 0, 1, \ldots, n$, sind die absoluten Beträge der Glieder irgendeiner Gleichung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

der äquimodularen Schar $\mathfrak{F}(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$. Ein fest gewähltes x ist dann und nur dann Wurzel einer solchen Schargleichung, wenn sich in der Zahlenebene das Polygon, gebildet aus den Vektoren $a_\nu x^{n-\nu}$, $\nu = 0, 1, \ldots, n$, schliesst. Da es nun gleichgültig ist, welcher Schargleichung x genügt, und somit welche Richtung die Vektoren $a_\nu x^{n-\nu}$ haben, so braucht nur untersucht zu werden, wann sich die Strecken $\alpha_\nu \,|\, x \,|^{n-\nu}$, $\nu = 0, 1, \ldots, n$, zu einem Polygon vereinigen lassen. Dies ist aber auf Grund des Lemmas dann und nur dann der Fall, wenn die Bedingungen (1, 4) erfüllt sind, q. e. d.

2. Mit Hilfe von Satz I ergeben sich die Radien der konzentrischen Kreisringe, in denen die Wurzeln sämtlicher Schargleichungen aus $\mathfrak{F}(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ liegen, aus den Grenzbedingungen

$$(2, 1) \qquad \alpha_k \,|\, x \,|^{n-k} = \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq k}}^{n} \alpha_\nu \,|\, x \,|^{n-\nu} \quad , \quad 0 \leqq k \leqq n \quad ,$$

die auch in der Gestalt

$$(2, 1^*) \quad \alpha_0 \,|\, x \,|^n + \alpha_1 \,|\, x \,|^{n-1} + \ldots + \alpha_{k-1} \,|\, x \,|^{n-k+1} - \alpha_k \,|\, x \,|^{n-k} + \alpha_{k+1} \,|\, x \,|^{n-k-1} + \ldots + \alpha_n = 0 \quad , \quad 0 \leqq k \leqq n \quad ,$$

geschrieben werden können.

Die Gleichungen (2, 1*) und damit auch die Gleichungen (2, 1) sind für jedes k, $0 \leqq k \leqq n$, Gleichungen aus der Schar $\mathfrak{F}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Für $k = 0$ und für $k = n$ erhalten wir je eine positive Wurzel. Nach einem bekannten Satz von Cauchy[1]) sind diese beiden Zahlen nichts anderes als die genaue obere, resp. die genaue untere Schranke für die absoluten Beträge der Wurzeln aller Schargleichungen. Sie sind daher auch gleich dem grössten, resp. gleich dem kleinsten Radius der Kreisringe, in denen die Wurzeln liegen.

Für $0 < k < n$ besitzt jede Gleichung (2, 1*) nach der Zeichenregel von Descartes höchstens zwei positive Wurzeln. Im einzelnen ergeben sich die folgenden drei Fälle:

[1]) Cauchy (1), p. 122.

a) Eine der Gleichungen (2, 1) [oder (2, 1*)] besitzt zwei verschiedene positive Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2, $\varrho_1 > \varrho_2$. Für ein x mit $\varrho_2 < |x| < \varrho_1$ gilt dann

$$\alpha_k |x|^{n-k} > \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq k}}^{n} \alpha_\nu |x|^{n-\nu} .$$

Nach Satz I kann x unmöglich Wurzel einer der Schargleichungen sein. Der Kreisring mit den Radien ϱ_1 und ϱ_2 enthält also in seinem Innern überhaupt keine Wurzel. Wir sprechen deshalb von einer Separation der Wurzeln durch den betreffenden Kreisring.

b) Eine der Gleichungen (2, 1) besitzt eine positive Doppelwurzel. Eine Separation tritt hier nicht mehr ein. Wir sprechen vom Grenzfall der Separation.

c) Für ein gewisses k besitzt (2, 1) keine positive Wurzel. Auch eine solche Gleichung kann nicht zu einer Separation der Wurzeln führen.

Bezeichnen wir mit G das Gebiet der Zahlenebene, in dem die Wurzeln sämtlicher Schargleichungen liegen, so besteht also G aus einer endlichen Anzahl von abgeschlossenen, punktfremden Kreisringen $K_1, K_2, \ldots, K_m$, deren gemeinsamer Mittelpunkt im Nullpunkt liegt. K_1 sei der äusserste unter diesen Kreisringen, K_2 der nächst innere, usw. Sei μ eine der Zahlen $1, 2, \ldots, m$. Dann besitzt jede Schargleichung aus Stetigkeitsgründen eine feste, nur von μ abhängige Anzahl von Wurzeln, die im Kreisring K_μ liegen. Wir bezeichnen diese Anzahl mit n_μ.

Offenbar ist $\sum_{\mu=1}^{m} n_\mu = n$.

Falls alle Grenzbedingungen (2, 1) mit $0 < k < n$ zu einer Separation der Wurzeln führen, so besteht G aus n verschiedenen Kreisringen. In diesem Sonderfall ist also $m = n$ und offenbar $n_\mu = 1$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$.

3. Wir bezeichnen mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die n Wurzeln einer beliebigen Gleichung aus der gegebenen Schar $\mathfrak{F}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Im folgenden nehmen wir stets an, dass die Wurzeln nach fallenden absoluten Beträgen geordnet sind, d. h. dass

$$(3, 1) \qquad |x_1| \geqq |x_2| \geqq \ldots \geqq |x_n|$$

gilt. Wir sprechen gelegentlich statt von x_ν auch von der ν-ten Wurzel der Gleichung.

Wir betrachten jetzt für ein festes ν, $1 \leqq \nu \leqq n$, die Gesamtheit der ν-ten Wurzeln aller Schargleichungen. Mit Z_ν bezeichnen wir die genaue obere und mit ζ_ν die genaue untere Schranke für $|x_\nu|$. Wir haben dann für $\nu = 1, 2, \ldots, n$

$$\zeta_\nu \leqq |x_\nu| \leqq Z_\nu \ . \tag{3, 2}$$

Unsere nächste Aufgabe besteht darin, die Zahlen Z_ν und ζ_ν mit den Radien der in Abschnitt 2. hergeleiteten Kreisringe zu vergleichen. Im Sonderfall, wo G in n verschiedene Kreisringe zerfällt, liegt die ν-te Wurzel gerade in K_ν . Z_ν und ζ_ν sind offenbar gleich dem grösseren, resp. dem kleinern Radius des Kreisrings K_ν .

Wenn für ein k die Gleichung (2, 1) zur Separation der Wurzeln oder auch nur zum Grenzfall der Separation führt, so lassen sich ζ_k und Z_{k+1} aus den positiven Wurzeln von (2, 1) bestimmen. Denn es gilt der

Satz II. Sei $\mathfrak{F}(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ eine äquimodulare Gleichungsschar. Besitzt dann für ein k, $0 < k < n$, die Gleichung

$$\alpha_k |x|^{n-k} = \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq k}}^{n} \alpha_\nu |x|^{n-\nu} \tag{2, 1}$$

zwei positive Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2 , $\varrho_1 \geqq \varrho_2$, so gilt

$$\zeta_k = \varrho_1 \ , \quad Z_{k+1} = \varrho_2 \ . \tag{3, 3}$$

Beweis. Wir setzen zunächst voraus, dass $\varrho_1 > \varrho_2$ ist. Nach den Bemerkungen in 2. separiert dann der Kreisring mit den Radien ϱ_1 und ϱ_2 die Wurzeln sämtlicher Schargleichungen.

Bezeichnen wir allgemein mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $|x_1| \geqq \ldots \geqq |x_n|$, die Wurzeln einer beliebigen Schargleichung, so muss es nach Satz I eine unter diesen Wurzeln geben, etwa x_{k^*}, deren absoluter Betrag den Wert ϱ_1 für eine geeignete Wahl der Schargleichung erreicht. ϱ_1 ist dann die untere Schranke ζ_{k^*} für $|x_{k^*}|$, da der offene Kreisring mit den Radien ϱ_1 und ϱ_2 wurzelfrei ist. Ebenso muss es eine unter den n Wurzeln geben, etwa x_l, deren absoluter Betrag den Wert ϱ_2 erreicht. ϱ_2 muss gleich der oberen Schranke Z_l für $|x_l|$ sein. Wir dürfen sogar annehmen, dass $l = k^* + 1$ ist, und haben damit

$$\varrho_1 = \zeta_{k^*} \ , \quad \varrho_2 = Z_{k^*+1} \ .$$

Die Bestimmung des Index k^* gestattet der Satz von Rouché. Für eine Zahl ϱ , für die $\varrho_1 > \varrho > \varrho_2$ gilt, folgt aus der Voraussetzung von Satz II

$$\alpha_k \varrho^{n-k} > \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq k}}^{n} \alpha_\nu \varrho^{n-\nu} . \tag{3, 4}$$

Bezeichnet $f(x) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x^{n-\nu} = 0$ eine beliebige Schargleichung, so folgt aus (3, 4) für jedes x mit $|x| = \varrho$

$$|a_k x^{n-k}| > \left| \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq k}}^{n} a_\nu x^{n-\nu} \right| .$$

Nach dem Satz von Rouché besitzt dann $f(x)$ im Innern des Kreises $|x| = \varrho$ gleich viele Wurzeln wie $\alpha_k x^{n-k}$, d. h. genau $n - k$. Ausserhalb des Kreises liegen daher k Wurzeln von $f(x)$, nämlich, in der vereinbarten Bezeichnung, $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Somit ist $k^* = k$, $\varrho_1 = \zeta_k$, $\varrho_2 = Z_{k+1}$, womit der Satz II für $\varrho_1 > \varrho_2$ bewiesen ist.

Für den Fall $\varrho_1 = \varrho_2$ ergibt sich der Beweis aus dem bereits Bewiesenen unmittelbar durch einen Grenzübergang. Denn bei einer kontinuierlichen Variation der absoluten Beträge der Koeffizienten ändern sich die Wurzeln der Schargleichungen stetig und damit auch die Schranken für ihre absoluten Beträge.

4. In den Sätzen I und II sind die in der Einleitung erwähnten Sätze von Pellet und Walsh in einer neuen, unseren Zwecken angepassten Formulierung zusammengefasst. Wir nennen die Gleichungen (2, 1) oder (2, 1*) im folgenden die Walshschen Gleichungen der äquimodularen Schar $\mathfrak{F}(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$.

Die Sätze I und II gestatten eine vollständige Diskussion der Kreisringe $K_1, \ldots, K_m$, die wir im Abschnitt 2. definiert haben:

Sei $k_1 > 0$ der kleinste Index, für den die Walshsche Gleichung (2, 1) zwei verschiedene positive Wurzeln besitzt. Dann liegen die Wurzeln $x_1, \ldots, x_{k_1}$ und nur diese im Kreisring K_1. Ist weiter k_2 der nächst folgende Index, für den wir aus (2, 1) zwei verschiedene positive Wurzeln erhalten, so liegen die Wurzeln $x_{k_1+1}, \ldots, x_{k_2}$ und nur diese im Kreisring K_2 , usw.

§ 2. Die relative Breite der Kreisringe, in denen die Wurzeln der Gleichungen einer äquimodularen Schar liegen.

5. Die Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ einer algebraischen Gleichung n-ten Grades

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

seien wiederum so geordnet, dass stets

$$|x_1| \geqq |x_2| \geqq \ldots \geqq |x_n| \tag{5, 1}$$

gilt.

Herr Ostrowski hat den folgenden Satz bewiesen[1]):

Satz III. Es gibt für jedes ganze positive n eine nur von n abhängige Zahl c_n, $1 \leqq c_n < 0{,}73 \cdot (n+1)^2$, sodass, wenn man die Argumente der Koeffizienten eines beliebigen Polynoms vom Grade n willkürlich variiert, jedoch die absoluten Beträge der Koeffizienten festhält, die Wurzel x_ν mit festem ν, $1 \leqq \nu \leqq n$, in einem abgeschlossenen Kreisring bleibt, dessen Mittelpunkt im Nullpunkt liegt, und dessen relative Breite höchstens gleich c_n ist.

Von jetzt an bezeichnen wir mit c_n stets die kleinste Schranke mit der im Satz III angegebenen Eigenschaft. Es existiert dann für jedes n eine äquimodulare Schar von Gleichungen n-ten Grades mit der folgenden Eigenschaft: Die Schar enthält zwei Gleichungen, deren Wurzeln mit $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ resp. mit $x_1'', x_2'', \ldots, x_n''$ bezeichnet seien, so dass für ein gewisses ν

$$\left| \frac{x_\nu'}{x_\nu''} \right| = c_n$$

gilt[2]).

Im Zusammenhang mit dem Problem der Bestimmung von c_n wollen wir die Zahlen $\gamma_n^{(\nu)}$ und $c_n^{(\nu)}$ einführen:

Sei $\mathfrak{F}(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ eine gegebene äquimodulare Schar von Gleichungen n-ten Grades. Für ein festes ν, $1 \leqq \nu \leqq n$, variiert dann die ν-te Wurzel x_ν in einem Kreisring, dessen relative Breite wir mit $\gamma_n^{(\nu)}(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ bezeichnen wollen. Die Zahlen $\gamma_n^{(\nu)}(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ hängen ausser von ν und von n noch

[1]) Ostrowski (1), p. 145.

[2]) Wir haben hier von der Stetigkeit und vom Auswahlprinzip Gebrauch gemacht.

von $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ ab. Nach der Definition von ζ_ν und Z_ν in Abschnitt 2. gilt offenbar

$$\gamma_n^{(\nu)}(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) = \frac{Z_\nu}{\zeta_\nu} .$$

Weiter bezeichne $c_n^{(\nu)}$ für ein festes ν und ein festes n das Maximum der Zahlen $\gamma_n^{(\nu)}(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$, das für eine geeignete Wahl von $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ sicher erreicht wird.

Offenbar ist $c_n^{(\nu)}$ nur von n und von ν abhängig.

Die Existenz der Zahlen $\gamma_n^{(\nu)}$ und $c_n^{(\nu)}$ wird vom Satz III gewährleistet. Denn es folgt aus der Definition von c_n und von $c_n^{(\nu)}$

$$c_n^{(\nu)} \leqq c_n \quad , \quad \nu = 1, 2, \ldots, n , \tag{5, 2}$$

wobei übrigens das Gleichheitszeichen für jedes n und für wenigstens ein ν richtig ist.

Für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ gilt stets

$$c_n^{(\nu)} = c_n{}^{(n-\nu+1)} . \tag{5, 3}$$

Denn ist $c_n^{(\nu)}$ für die Wurzel x_ν berechnet, so braucht man bloss in den Gleichungen n-ten Grades die Transformation $x = \frac{1}{x'}$ durchzuführen und schliesst dann aus $x_\nu = \frac{1}{x'_{n-\nu+1}}$, dass für jede äquimodulare Schar von Gleichungen n-ten Grades

$$\frac{\text{Max} \mid x_\nu \mid}{\text{Min} \mid x_\nu \mid} = \frac{\text{Max} \mid x'_{n-\nu+1} \mid}{\text{Min} \mid x'_{n-\nu+1} \mid}$$

gilt, woraus (5, 3) nach der Definition von $c_n^{(\nu)}$ unmittelbar folgt.

6. Die genauen Werte von $c_n^{(1)}$ und von $c_n^{(n)}$ lassen sich mit einfachen Hilfsmitteln finden:

Satz IV. Für die absolut grösste und die absolut kleinste Wurzel der Gleichungen n-ten Grades einer äquimodularen Schar gilt

$$c_n^{(1)} = c_n^{(n)} = \frac{1}{\sqrt[n]{2} - 1} . \tag{6, 1}$$

Beweis. Es genügt, (6, 1) für $c_n^{(1)}$ zu beweisen, da wegen (5, 3) $c_n^{(n)} = c_n^{(1)}$ gilt.

Wir schreiben die Gleichungen einer gegebenen äquimodularen Schar in der Gestalt

$$x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \binom{n}{2} a_2 x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n} a_n = 0 \tag{6, 2}$$

und setzen $|a_\nu| = A_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

Wir benützen eine Ungleichung, die von Herrn G. D. Birkhoff, Birkhoff (1), und unabhängig von ihm von Herrn J. L. Jensen, Jensen (1), durch eine einfache Überlegung gefunden wurde:

Sei

$$m = \operatorname*{Max}_{\nu=1,\ldots,n} A_\nu^{1/\nu} \tag{6,3}$$

gesetzt. Dann gilt

$$m \leqq |x_1| \leqq m \frac{1}{\sqrt[n]{2}-1} \,. \tag{6,4}$$

Die Schranken (6, 4) werden für die spezielle äquimodulare Schar mit $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = 1$ erreicht. Denn hier ist $m = 1$, und für die Schargleichung

$$x^n - \binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} - + \ldots \pm \binom{n}{n} \equiv (x-1)^n = 0$$

ist $x_1 = 1$, während in der Schargleichung

$$x^n - \binom{n}{1} x^{n-1} - \binom{n}{2} x^{n-2} - \ldots - \binom{n}{n} \equiv 2\,x^n - (x+1)^n = 0$$

x_1 mit der einzigen positiven Wurzel identisch ist, d. h. mit $\frac{1}{\sqrt[n]{2}-1}$.

Satz IV ist dann eine unmittelbare Folge der Ungleichung (6, 4).

7. Für die quadratischen Gleichungen erhalten wir aus Satz IV

$$c_2 = c_2^{(1)} = c_2^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = 1+\sqrt{2} \,, \tag{7,1}$$

ein Ergebnis, das zuerst von Herrn Ostrowski, auf anderem Wege, hergeleitet wurde[1]).

Weiter folgt aus (5, 2) und aus (6, 1) unmittelbar

$$c_n \geqq \frac{1}{\sqrt[n]{2}-1}$$

und für $n \to \infty$

$$\lim \frac{c_n}{n} \geqq \lim \frac{1}{n \cdot (\sqrt[n]{2}-1)} = \frac{1}{\lg 2} = 1{,}442\ldots \,. \tag{7,2}$$

8. Wir stellen uns weiterhin die Aufgabe, die Zahl c_3 für die kubischen Gleichungen und insbesondere die Zahlen $c_3^{(1)}$, $c_3^{(2)}$, $c_3^{(3)}$ zu berechnen.

[1]) Ostrowski (1), p. 147—148.

Nach Formel (6, 1) von Satz IV gilt

$$c_3^{(1)} = c_3^{(3)} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} = 3{,}847\ldots\ . \tag{8, 1}$$

Zur Bestimmung von $c_3^{(2)}$ (und damit auch von c_3) werden wir zuerst einige Sätze über die Schranken für die „mittlere Wurzel" x_2 beweisen.

Satz V. Es sei $\mathfrak{F}(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ eine äquimodulare Schar von Gleichungen dritten Grades. Dann ist die genaue obere Schranke Z_2 für die absoluten Beträge der „mittleren Wurzeln" aller Schargleichungen gleich dem absoluten Betrag der „mittleren Wurzel" in der WALSHschen Gleichung

$$\alpha_0 x^3 - \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3 = 0\ . \tag{8, 2}$$

Die genaue untere Schranke ζ_2 für die absoluten Beträge der „mittleren Wurzeln" ergibt sich entsprechend aus der WALSHschen Gleichung

$$\alpha_0 x^3 + \alpha_1 x^2 - \alpha_2 x + \alpha_3 = 0\ . \tag{8, 3}$$

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass wir die Behauptung nur für Z_2 zu beweisen brauchen. Denn mittels der Transformation $x = \frac{1}{x'}$ geht die Schar $\mathfrak{F}(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ in die Schar $\mathfrak{F}(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0)$ und die obere Schranke der mittleren Wurzel in die untere Schranke über. Aus (8, 2) folgt dann aber die Behauptung für die Gleichung (8, 3), wenn man statt der Schar $\mathfrak{F}(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0)$ wieder die Schar $\mathfrak{F}(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ nimmt.

Durch die Transformation $x = -x'$ geht (8, 2) in die WALSHsche Gleichung

$$x'^3 + \alpha_1 x'^2 + \alpha_2 x' - \alpha_3 = 0 \tag{8, 4}$$

über, deren einzige positive Wurzel nach CAUCHY gleich der genauen unteren Schranke ζ_3 für die absolut kleinste Wurzel ist. Bezeichnen wir die Wurzeln von (8, 2) mit y_1, y_2, y_3, $|y_1| \geqq |y_2| \geqq |y_3|$, so ist daher $y_3 = -\zeta_3$.

Für den Fall, wo (8, 2) zwei positive Wurzeln besitzt, folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz II.

Es besitze jetzt (8, 2) keine positiven Wurzeln. Dann sind y_1 und y_2 konjugiert-komplex. Wir haben zu beweisen, dass $|y_2| = Z_2$ ist.

Da (8, 2) eine Gleichung aus der Schar $\mathfrak{F}(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ist, so genügt es zu zeigen, dass für die Wurzel x_2 irgendeiner Schargleichung $a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$ stets die Ungleichung $|x_2| \leqq |y_2|$ gilt.

In der Tat, gäbe es ein x_2 mit $|x_2| > |y_2|$, so müsste für eine solche Schargleichung, wegen $|x_1| \cdot |x_2| \cdot |x_3| = |y_2| \cdot |\bar{y}_2| \cdot \zeta_3 = \frac{\alpha_3}{\alpha_0}$,

$$|x_3| = \frac{\frac{\alpha_3}{\alpha_0}}{|x_1| \cdot |x_2|} \leqq \frac{\frac{\alpha_3}{\alpha_0}}{|x_2|^2} < \frac{\frac{\alpha_3}{\alpha_0}}{|y_2|^2} = \frac{\frac{\alpha_3}{\alpha_0}}{|y_2| \cdot |_2\bar{y}|} = \zeta_3$$

sein, im Widerspruch zu der Eigenschaft von ζ_3, die untere Schranke für alle $|x_3|$ der Schargleichungen zu sein. Daher ist $Z_2 = |y_2|$, q. e. d.

9. **Satz VI.** Für die „mittlere Wurzel" x_2 der Gleichungen einer äquimodularen Schar $\mathfrak{F}(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ gilt

$$(9, 1) \qquad \sqrt{\frac{\frac{\alpha_3}{\alpha_0}}{Z_1}} \leqq |x_2| \leqq \sqrt{\frac{\frac{\alpha_3}{\alpha_0}}{\zeta_3}} .$$

Beweis. Seien $x_1, x_2, x_3, |x_1| \geqq |x_2| \geqq |x_3|$, die Wurzeln einer Gleichung der Schar $\mathfrak{F}(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Aus $|x_1| \cdot |x_2| \cdot |x_3| = \frac{\alpha_3}{\alpha_0}$ schliessen wir die Ungleichung $|x_2|^2 \cdot |x_3| \leqq \frac{\alpha_3}{\alpha_0}$ und daraus

$$|x_2| \leqq \sqrt{\frac{\frac{\alpha_3}{\alpha_0}}{|x_3|}} \leqq \sqrt{\frac{\frac{\alpha_3}{\alpha_0}}{\zeta_3}} .$$

Entsprechend haben wir $|x_1| \cdot |x_2|^2 \geqq \frac{\alpha_3}{\alpha_0}$ und damit

$$|x_2| \geqq \sqrt{\frac{\frac{\alpha_3}{\alpha_0}}{|x_1|}} \geqq \sqrt{\frac{\frac{\alpha_3}{\alpha_0}}{Z_1}} , \text{ q. e. d.}$$

10. **Satz VII.** $\mathfrak{F}(1, \alpha_1, \alpha_2, 1)$ sei eine äquimodulare Schar von Gleichungen dritten Grades, wobei also $\alpha_0 = \alpha_3 = 1$ angenommen ist. Sei ferner

$$(10, 1) \qquad \varrho = 3 \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}} = 4{,}403\ldots$$

gesetzt. Bilden wir dann die Zahlen

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1}{\varrho} \quad , \quad \beta_2 = \frac{\alpha_2}{\varrho} \quad , \tag{10, 2}$$

$$m = \frac{\text{Max}\,(1\ ,\ \sqrt{\beta_1}\ ,\ \beta_2)}{\text{Max}\,(1\ ,\ \beta_1\ ,\ \sqrt{\beta_2})} \quad , \tag{10, 3}$$

$$c = \frac{\varrho^{+3}}{\varrho^{-3}} = 5{,}274\ldots \quad , \tag{10, 4}$$

so gilt für die „mittlere Wurzel" x_2 einer jeden Schargleichung

$$\frac{m}{\sqrt[3]{c}} \leqq |x_2| \leqq m\sqrt{c} \quad . \tag{10, 5}$$

Die Schranken (10,5) sind für die spezielle Schar $\mathfrak{F}(1\ ,\ \varrho\ ,\ \varrho\ ,\ 1)$ genau.

Dem Beweis von Satz VII schicken wir eine Folgerung voraus. Durch die Transformation $x = r \cdot x'$ mit einem geeigneten (reellen oder komplexen) Faktor r können wir die Gleichungen einer beliebigen Schar $\mathfrak{F}(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ in die Gleichungen einer Schar der spezielleren Gestalt $\mathfrak{F}(1, \alpha_1', \alpha_2', 1)$ überführen. Bei einer solchen Transformation werden die Wurzeln der Gleichungen mit $\frac{1}{r}$ multipliziert und daher die Schranken für ihre absoluten Beträge mit $\frac{1}{|r|}$. Die relativen Breiten der Kreisringe, in denen die Wurzeln liegen, sind als Quotienten aus je zwei derartigen Schranken jedoch invariant.

Aus Satz VII folgt daher, dass für jede äquimodulare Schar von Gleichungen dritten Grades x_2 in einem Kreisring variiert, dessen relative Breite höchstens gleich c ist. Da der Wert c gemäss Satz VII für die Schar $\mathfrak{F}(1, \varrho, \varrho, 1)$ erreicht wird, so haben wir $c_3^{(2)} = c$. Da ausserdem wegen (8, 1) $c_3^{(2)} > c_3^{(1)}$ ist, so folgt aus (5, 2) $c_3 = c_3^{(2)}$.

Aus Satz VII folgern wir daher den

Satz VIII. Sei c die durch (10, 4) definierte Zahl. Dann gilt

$$c_3 = c_3^{(2)} = c \quad . \tag{10, 6}$$

11. Zur Vorbereitung des Beweises von Satz VII leiten wir einige Relationen für die Zahlen ϱ und c her.

Hilfssatz. Für die durch (10, 1) und (10, 4) definierten Zahlen ϱ und c gilt

$$\varrho^4 - 18\,\varrho^2 - 27 = 0 \quad , \tag{11, 1}$$

$$c^4 - 4\,c^3 - 6\,c^2 - 4\,c + 1 = 0 \quad . \tag{11, 2}$$

Ferner gilt identisch in x

$$(11,3) \qquad (x-\sqrt{c})^2\left(x+\frac{1}{c}\right) \equiv x^3-\varrho\, x^2+\varrho\, x+1 \ .$$

Beweis. Die Gleichung (11, 1) lässt sich auf eine quadratische Gleichung zurückführen. Man erhält für ihre einzige positive Wurzel unmittelbar den durch (10, 1) festgesetzten Wert für ϱ .

Aus (10, 4) ergibt sich

$$(11,4) \qquad \varrho = 3\cdot\frac{c+1}{c-1} \ .$$

Setzen wir den gefundenen Ausdruck (11, 4) für ϱ in (11, 1) ein, so folgt nach einer leichten Umrechnung (11, 2).

Um auch (11, 3) zu beweisen, lösen wir auf der linken Seite von (11, 3) die Klammern auf und erhalten das Polynom

$$x^3-(2\sqrt{c}-\frac{1}{c})\,x^2+(c-\frac{2}{\sqrt{c}})\,x+1 \ .$$

Es genügt offenbar zu zeigen, dass

$$(11,5) \qquad \varrho = 2\sqrt{c}-\frac{1}{c} \ ,$$

$$(11,6) \qquad \varrho = c-\frac{2}{\sqrt{c}}$$

gilt. Die beiden Beziehungen (11, 5) und (11, 6) lassen sich aber unmittelbar verifizieren, wenn man etwa ϱ durch die rechte Seite von (11, 4) ersetzt, $\sqrt{c}$ durch c ausdrückt und quadriert, da hierbei die bereits bewiesene Relation (11, 2) herauskommt.

12. Beweis von Satz VII. Wir zeigen zuerst, dass die Behauptung des Satzes für die spezielle Schar $\mathfrak{F}(1, \varrho, \varrho, 1)$ zutrifft.

Wir bestimmen dazu die genaue obere Schranke Z_2 und die genaue untere Schranke ζ_2 für den absoluten Betrag der mittleren Wurzel der Schargleichungen. Nach Satz V ist Z_2 gleich dem absoluten Betrag der mittleren Wurzel der Walsh-schen Gleichung

$$x^3-\varrho\, x^2+\varrho\, x+1=0 \ .$$

Aus (11, 3) folgt dann unmittelbar

$$(12,1) \qquad Z_2=\sqrt{c} \ .$$

Durch die Transformation $x=\frac{1}{x'}$ gehen die Gleichungen der Schar $\mathfrak{F}(1, \varrho, \varrho, 1)$ wieder in Gleichungen dieser Schar über. Daher muss $\zeta_2=\frac{1}{Z_2}$ sein, woraus

(12, 2) $$\zeta_2 = \frac{1}{\sqrt{c}}$$

folgt. Anderseits haben wir wegen (10, 2) und (10, 3) $\beta_1 = \beta_2 = 1$, $m = 1$. Aus (12, 1) und (12, 2) folgt daher sofort (10, 5). Ausserdem sind die beiden Schranken $m\sqrt{c}$ und $\frac{m}{\sqrt{c}}$ für die spezielle Schar $\mathfrak{F}(1, \varrho, \varrho, 1)$ genau.

Es sei jetzt $\mathfrak{F}(1, \alpha_1, \alpha_2, 1)$ eine beliebig gegebene äquimodulare Schar mit $\alpha_0 = \alpha_3 = 1$. Zum Beweis der Ungleichungen (10, 5) überlegen wir, dass es genügt, die Ungleichung rechter Hand herzuleiten. Denn ist dies geschehen, so brauchen wir nur in den Gleichungen der Schar die Transformation $x = \frac{1}{x'}$ auszuführen. Bezeichnen wir dabei die neuen Grössen (10, 2) und (10, 3) entsprechend mit β_1', β_2', m', so haben wir

$$\beta_1' = \beta_2 \ , \ \beta_2' = \beta_1 \ , \ m' = \frac{1}{m} \ , \ x_2' = \frac{1}{x_2} \ .$$

Aus $|x_2'| \leqq m'\sqrt{c}$ folgt dann sofort

$$\frac{1}{|x_2|} \leqq \frac{1}{m}\sqrt{c} \ , \ |x_2| \geqq \frac{m}{\sqrt{c}} \ ,$$

und dies ist gerade die Ungleichung links in (10, 5).

Wir unterscheiden jetzt je nach der Grösse von β_1 und von β_2 zwei Fälle:

Erster Fall: $\beta_1 \leqq \mathrm{Max}(1, \sqrt{\beta_2})$

Zweiter Fall: $\beta_1 > \mathrm{Max}(1, \sqrt{\beta_2})$

Im ersten Fall folgt aus der Annahme zunächst $\sqrt{\beta_1} \leqq \mathrm{Max}(1, \sqrt{\beta_2})$ und erst recht $\sqrt{\beta_1} \leqq \mathrm{Max}(1, \beta_2)$. Daher gilt

$$m = \frac{\mathrm{Max}(1, \sqrt{\beta_1}, \beta_2)}{\mathrm{Max}(1, \beta_1, \sqrt{\beta_2})} = \frac{\mathrm{Max}(1, \beta_2)}{\mathrm{Max}(1, \sqrt{\beta_2})} = \mathrm{Max}(1, \sqrt{\beta_2}) \ .$$

Daraus schliessen wir weiter

(12, 3) $$m \geqq 1 \ , \ \beta_1 \leqq m \ , \ \beta_2 \leqq m^2 \ .$$

Nach Satz VI gilt

$$|x_2| \leqq \frac{1}{\sqrt{\zeta_3}} \ .$$

Es genügt daher zu zeigen, dass

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta_3}} \leqq m\sqrt{c}$$

oder, dass

$$\zeta_3 \geqq \frac{1}{m^2 c} \tag{12, 4}$$

ist.

Wäre $\zeta_3 < \frac{1}{m^2 c}$, so folgte aus der WALSHschen Gleichung

$$x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x - 1 = 0 ,$$

der ja ζ_3 genügt, wegen $\alpha_1 = \varrho \beta_1$, $\alpha_2 = \varrho \beta_2$,

$$\frac{1}{(m^2 c)^3} + \varrho \beta_1 \frac{1}{(m^2 c)^2} + \varrho \beta_2 \frac{1}{m^2 c} - 1 > 0$$

oder

$$\frac{1}{m^6} + \varrho \frac{\beta_1}{m^4} c + \varrho \frac{\beta_2}{m^2} c^2 - c^3 > 0$$

und wegen (12, 3) erst recht

$$1 + \varrho c + \varrho c^2 - c^3 > 0 ,$$

entgegen der Relation $1 + \varrho c + \varrho c^2 - c^3 = 0$, die aus (11, 3) für $x = -\frac{1}{c}$ unmittelbar folgt.

Daher muss (12, 4) gelten, womit der Beweis für den ersten Fall erbracht ist.

Im zweiten Fall folgt aus $\beta_1 > \operatorname{Max}(1, \sqrt{\beta_2})$

$$m - \frac{\operatorname{Max}(1 , \sqrt{\beta_1} , \beta_2)}{\operatorname{Max}(1 , \beta_1 , \sqrt{\beta_2})} = \frac{\operatorname{Max}(\sqrt{\beta_1} , \beta_2)}{\beta_1} = \operatorname{Max}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta_1}} , \frac{\beta_2}{\beta_1}\right)$$

und damit

$$\text{(12, 5)} \qquad \begin{cases} \dfrac{m}{\beta_1} = \operatorname{Max}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\beta_1}^3} , \left(\dfrac{\sqrt{\beta_2}}{\beta_1}\right)^2\right) < 1 , \\ \dfrac{\beta_2}{m \cdot \beta_1} = \dfrac{1}{\operatorname{Max}\left(\frac{\sqrt{\beta_1}}{\beta_2} , 1\right)} \leqq 1 \\ \dfrac{1}{m^2 \beta_1} = \dfrac{1}{\operatorname{Max}\left(1 , \frac{\beta_2^2}{\beta_1}\right)} \leqq 1 . \end{cases}$$

Wir beweisen hier zuerst, dass für kein Zahlenpaar β_1, β_2, welches der Bedingung des zweiten Falles genügt, $Z_2 = m \sqrt{c}$ sein kann.

Nach Satz V ist Z_2 gleich dem absoluten Betrag der mittleren Wurzel der WALSHschen Gleichung

$$x^3 - \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + 1 = 0 .$$

Durch Übergang zu den absoluten Beträgen der Glieder gewinnt man daraus für $|x| = Z_2$ die Ungleichung

$$\alpha_1 Z_2^2 \leqq Z_2^3 + \alpha_2 Z_2 + 1$$

oder, wegen $\alpha_1 = \varrho\beta_1$, $\alpha_2 = \varrho\beta_2$, die Ungleichung

$$\varrho\beta_1 Z_2^2 \leqq Z_2^3 + \varrho\beta_2 Z_2 + 1 \ .$$

Wäre nun $Z_2 = m\sqrt{c}$ für ein geeignetes Zahlenpaar β_1, β_2, so hätte man

$$\varrho\beta_1 m^2 \sqrt{c}^2 \leqq m^3 \sqrt{c}^3 + \varrho\beta_2 m \sqrt{c} + 1$$

oder

$$\varrho \sqrt{c}^2 \leqq \frac{m}{\beta_1} \sqrt{c}^3 + \frac{\beta_2}{m\beta_1} \varrho \sqrt{c} + \frac{1}{m^2\beta_1} \ .$$

Wegen (12, 5) folgte daraus

$$\varrho \sqrt{c}^2 < \sqrt{c}^3 + \varrho \sqrt{c} + 1 \ ,$$

was jedoch der Gleichung (11, 3) für $x = \sqrt{c}$ widerspräche.

Also ist für jedes β_1 und β_2 mit $\beta_1 > \text{Max}\,(1, \sqrt{\beta_2})$

$$Z_2 \neq m\sqrt{c} \ .$$

Da das Gebiet der (β_1, β_2)-Ebene, das durch die Ungleichung $\beta_1 > \text{Max}\,(1, \sqrt{\beta_2})$ definiert wird, zusammenhängend ist, so muss dort aus Stetigkeitsgründen stets $Z_2 < m\sqrt{c}$ oder stets $Z_2 > m\sqrt{c}$ gelten. Dass die erste der beiden Ungleichungen richtig ist, werden wir an der speziellen Gleichungsschar $\mathfrak{F}\,(1\,, \frac{9}{2}\,, \frac{9}{2}\,, 1)$ verifizieren:

Die Bedingung des zweiten Falles ist wegen $\beta_1 = \beta_2 = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{\varrho} = \frac{9}{2 \cdot 4{,}40\ldots} > 1$ erfüllt. Die Walshsche Gleichung

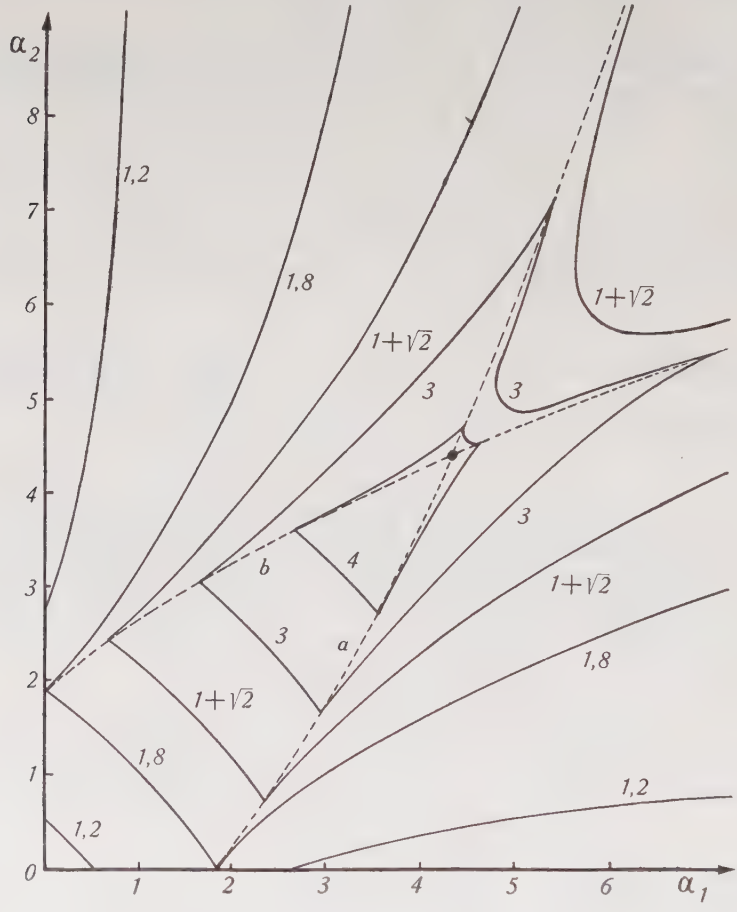
$$f(x) \equiv x^3 - \frac{9}{2} x^2 + \frac{9}{2} x + 1 = 0$$

besitzt die positive Wurzel 2. Da $f'(2) < 0$ ist, so ist 2 die kleinere der beiden positiven Wurzeln von $f(x)$. Nach Satz II ist daher $Z_2 = 2$. Wegen $\beta_1 = \beta_2$ ist anderseits $m = 1$, so dass sich die Richtigkeit von $Z_2 < m\sqrt{c}$ wegen $c > 4$, $\sqrt{c} > 2$ unmittelbar ergibt.

Damit ist der Satz VII vollständig bewiesen.

13. Wir wollen das Ergebnis der Sätze VII und VIII noch an einem Diagramm veranschaulichen. Wie schon nach dem Satz VII bemerkt wurde, lassen sich die Gleichungen

jeder äquimodularen Schar $\mathfrak{F}(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ durch eine Transformation $x = r \cdot x'$ mit einem geeigneten r in die Gleichungen einer Schar der Gestalt $\mathfrak{F}(1, \alpha_1, \alpha_2, 1)$ überführen, ohne dass sich die relativen Breiten für die drei Kreisringe, in denen die Wurzeln liegen, änderten.



Sei $\gamma_3^{(2)} = \gamma_3^{(2)}(1, \alpha_1, \alpha_2, 1)$ nach der Definition in Abschnitt 5. die genaue relative Breite des Kreisrings, in dem die mittlere Wurzel x_2 einer gegebenen Schar $\mathfrak{F}(1, \alpha_1, \alpha_2, 1)$ variiert. Die Figur zeigt dann in der (α_1, α_2)-Ebene die Kurvenschar $\gamma_3^{(2)} = \text{const}$. Aus den Gleichungen (8, 2) und (8, 3) von Satz V folgt, dass

$$\gamma_3^{(2)}(1, \alpha_1, \alpha_2, 1) = \gamma_3^{(2)}(1, \alpha_2, \alpha_1, 1)$$

ist, und dass daher die Kurven $\gamma_3^{(2)} = \text{const.}$ zur Geraden $\alpha_1 = \alpha_2$ symmetrisch liegen. Ihre Ecken und Spitzen befinden sich alle auf den beiden, in der Figur mit a und b bezeichneten Kurven. Wie man leicht aus Satz V entnimmt, bestehen a und b aus der Gesamtheit der Punkte α_1, α_2, in denen die Diskriminante von (8, 2), resp. von (8, 3) verschwindet.

Im Schnittpunkt von a und von b, der die Koordinaten $\alpha_1 = \alpha_2 = \varrho = 4{,}403..$ besitzt, erreicht $\gamma_3^{(2)}$ den in Satz VIII angegebenen maximalen Wert $c_3 = 5{,}274..$.

Durch eine einfache Rechnung zeigt man ferner, dass $\gamma_3^{(2)}$ auf der α_1-Achse sein Maximum im Anfangspunkt von a erreicht. Seine Koordinaten sind $\alpha_1 = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} = 1{,}889..$, $\alpha_2 = 0$. Das Maximum beträgt 1,83.., eine Zahl, die der Gleichung $x^6 - 3x^4 - 1 = 0$ genügt.

Wir bemerken noch, dass die Kurve $\gamma_3^{(2)} = 1 + \sqrt{2}$ solche Kurven $\gamma_3^{(2)} = \text{const.}$, die aus einem zusammenhängenden Linienzuge bestehen, von solchen Kurven scheidet, die in zwei getrennte Linienzüge zerfallen.

Manuskript eingegangen am 1. November 1943.

Curriculum vitae.

Am 6. April 1914 wurde ich, Eduard Batschelet, als Sohn des Kaufmanns Ernst Batschelet und seiner Gattin Anna, geb. Kohler, in Biel geboren. Im Jahre 1920 siedelten meine Eltern nach Basel über und erwarben sich hier das Bürgerrecht. Ich besuchte die Primarschule und das Humanistische Gymnasium. Nachdem ich im Frühling 1933 die Maturitätsprüfung bestanden hatte, bezog ich die hiesige Universität zum Studium von Mathematik, Astronomie, Physik und Geographie. 1936—1937 war ich Assistent bei Herrn Prof. Ostrowski. Im Frühjahr 1939 erhielt ich das Diplom für das Lehramt an mittleren Schulen und im Frühjahr 1940 das Diplom für das Lehramt an oberen Schulen. Seit 1939 unterrichte ich als Lehrer am Humanistischen Gymnasium Basel.

Ich besuchte Vorlesungen und Übungen der folgenden Herren Professoren und Privatdozenten: H. Barth, E. Bodewig, P. Buchner, R. Flatt, P. Häberlin, A. Hagenbach, F. Jaeger, W. Matthies, E. Miescher, Th. Niethammer, A. Ostrowski, H. Schmalenbach, O. Spiess, P. Vosseler, M. Wehrli, H. Zickendraht.

Allen meinen Lehrern fühle ich mich zu grösstem Dank verpflichtet. Ganz besonderen Dank schulde ich Herrn Prof. A. Ostrowski, unter dessen Leitung meine Dissertation entstanden ist. Seine vielen wertvollen Ratschläge haben meine Arbeit stark gefördert.